41 在正五邊形上跳舞⋯搶 20 的遊戲

將船艙改裝成書店，航行在世界各地，販售各國書籍，是一種新鮮的經營模式。記得民國七十六年我在高雄實習時，從報紙上得知有一艘這樣的海上書展船會停泊在高雄港，於是利用假日登船尋寶一番。對於這趟挖寶之旅，只記得一件事情，那也是一則數學遊戲在台灣深根的開端。經過二十年的進化，那道有關累加數字遊戲，早已從舶來品成長為在正五邊形上操作的移動硬幣遊戲。對於這樣的在地貨，不介紹給大家認識，是有點可惜。

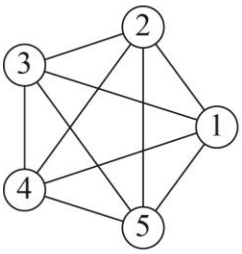
假設遊戲者為甲、乙兩人且甲先玩，並遵守下列規則：遊戲者必須輪流從

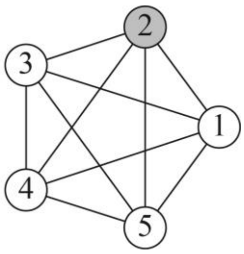
$\boxed{1}$ $\boxed{2}$ $\boxed{3}$ $\boxed{4}$ $\boxed{5}$

中選擇一數，但不可重複對方剛選的數。如此下去，將兩人所選的數字累加起來，當累加至正整數 20 者算贏（動彈不得或故意讓累加的數字超過 20 者算輸）。問：甲或乙有必勝的策略？這是那道舶來品的原來敘述，後來我把它修改成「將一枚硬幣放置在上述五個數字內，甲、乙兩人輪流移動硬幣並累加的遊戲」。最後，又將此遊戲與正五邊形相連結。

古希臘歐幾里德在他的《幾何原本》中描述了一個用直尺和圓規做出正五邊形的過程，也因為這個緣故，正五邊形成為歐氏學派重要的圖騰。我將那道移動銅板的數字遊戲與正五邊形結合成如下的遊戲：

如下圖的左圖所示，在正五邊形的五個頂點各畫一個圓，並依序寫上 1, 2, 3, 4, 5 等五個數字。甲、乙兩人在這幾何圖形上玩累加數字遊戲，規則如下：





(1) *先玩的甲拿出一枚拾圓硬幣，放置在五個頂點中的一個（上圖中的右圖代表甲將硬幣置於編號 2 號的頂點）。*

(2) *後玩的乙必須將硬幣依著邊線或對角線，移動至其它編號的頂點。*

(3) *接著甲同樣將硬幣依著邊線或對角線，移動至其它編號的頂點，即硬幣不可以不移動的意思。*

(4) *依此規則，輪流移動硬幣。*

(5) *將移動到的頂點編號累加，當移動完硬幣後，頂點編號累加剛好為 20 者贏，放棄或超過 20 者輸。*

關於這道遊戲，先玩或後玩者有必勝的策略呢？

如果我們將累加數 20 改成其餘數字 N，那麼探討「何者有必勝的策略」是一道不錯的研究問題。顯然，當 $N=1,2,3,4,5$ 時，先玩的甲肯定有必勝的策略（只需將硬幣直接置於該數字的頂點上即可）。而當 $N=6$ 時，誰有必勝的策略呢？不經思索的情況下，很多人會誤認為乙有必勝的策略，但事實並不是這樣。當甲將硬幣放置在編號 3 的頂點上，這時乙必須移動硬幣，但乙只能移動到編號 1 或 2 的位置，此時甲只需再移動到編號 2 或 1 的位置就可。所以 $N=6$ 也是甲會贏的數字。

從上述過程中，不難理解乙會勝的累加數字 N 似乎不是很多，將這些乙會勝的累加數字 N 用數學公式描述下來，究竟這些數字構成的數列是等差，等比或其它更複雜的數列，是值得研究的問題。現在就讓我們研究一下乙會勝的第一個數字為何？$N=7$ 是乙會勝的第一個數字，為什麼呢？因為當甲將硬幣放置在編號 2, 3, 4, 5, 6 位置，乙將硬幣移動到編號 5, 4, 3, 2, 1 的位置就可以，而當甲將硬幣放置在編號 1 的位置時，此時剩下的數字為 6，記得剛剛才討論過 6 是先玩會贏的數字，而且必須移動到編號 3 的位置才行。所以乙將硬幣移動到編號 3 的位置，順邊卡住讓甲移到編號 3 的位置，接下來容易判別甲無法勝。因此，$N=7$ 是後玩的乙第一個會勝的數字。

有了這些討論之後，相信讀者可以理解這道遊戲的陷阱在哪裡。想想看！第二個讓乙獲勝的數字為何？當 $N=8,9,10,11,12$ 時，甲將硬幣放置在編號 1, 2, 3, 4, 5 的位置，然後剩

餘的數字都是 7。因為此時甲變為後玩，所以甲只需仿照前面的討論就可贏得比賽。而當 $N=13$ 時，若甲將硬幣放置在編號 1, 2, 4, 5 的位置，則乙可以移動硬幣至編號 5, 4, 2, 1 的位置，此時剩餘的數字為 7，乙贏。若甲將硬幣放置在編號 3 位置，此時剩餘的數字為 10，則乙顯然無法移動硬幣至編號 3 的位置，佔據剩餘的數字 7 的關鍵數，但乙可以移至編號 5 的位置，讓剩餘的數也是 5，將甲卡住，這種情形也是乙贏。所以第二個讓乙獲勝的數字為 13。

綜合上述討論，當你移完硬幣，且剩餘的數字為 7 或 13 時，可以得勝（即 $N=7,13$ 是後玩會贏的數字）。因此當 $N=14,15,16,17,18$ 時，甲將硬幣放置在編號 1, 2, 3, 4, 5 的位置，可勝。當 $N=19$ 時，甲無法在第一次放置之後，讓剩餘數字為 13，但這並不代表甲會輸，甲可以將硬幣放置在編號 3 的位置，剩餘數字為 16，此時乙被卡住，也無法移動之後，讓剩餘數字變成 13。這時當乙移動到編號 1, 2 的位置時，甲只需移動到編號 2, 1 的位置，即可讓剩餘的數字為 13，甲勝；當乙移動到編號 4, 5 的位置時，甲只需移動到編號 5, 4 的位置，即可讓剩餘的數字為 7，甲勝，故 $N=19$ 也是甲勝。

本遊戲所討論的 $N=20$ 的情形，當甲將硬幣放置在編號 2, 3, 4, 5 的位置時，乙可以移動硬幣，讓剩餘的數字為 13，乙贏；當甲將硬幣放置在編號 1 的位置時，剩餘的數字為 19，乙可以移動硬幣到編號 3 的位置，讓剩餘數字為 16，同時卡住甲，讓他無法移動硬幣到編號 3 的位置，讓剩餘數字為 13。接下來同上一段的討論，乙可以讓剩餘數字控制在 13 或 7，故乙會贏。因此，$N=20$ 是乙會贏的第三個數字。

繼續討論下去，我們可以發現乙會贏的數字從大到小依序為

$$7,13,20,26,33,39,46,\cdots.$$

(1) 你發現數列

$$7,13,20,26,33,39,46,\cdots$$

的規律了嗎？

(2) 如果將正五邊形改成其它的正偶數多邊形，那麼後玩者有必勝策略的數字為哪些？

(3) 如果將正五邊形改成其它的正奇數多邊形，那麼後玩者有必勝策略的數字為哪些？